
DESCENTE GALOISIENNE SUR LE SECOND GROUPE DE CHOW : MISE AU POINT

par

Jean-Louis Colliot-Thélène

Résumé. — Le troisième groupe de cohomologie étale non ramifié d'une variété projective et lisse, à coefficients dans les racines de l'unité tordues deux fois, intervient dans plusieurs articles récents, en particulier en relation avec le groupe de Chow de codimension 2. Des résultats généraux ont été obtenus à ce sujet par B. Kahn en 1996. De récents travaux m'incitent à les passer en revue, et à les spécialiser aux variétés géométriquement rationnelles.

Abstract. — Connexions between the second Chow group of a smooth projective variety and its third unramified cohomology group, with coefficients the roots of unity twisted twice, feature in several recent works. In this note we revisit a 1996 paper by B. Kahn and specialize it to geometrically rational varieties.

Dans tout cet article, on note F un corps de caractéristique zéro, \overline{F} une clôture algébrique de F et $G = \text{Gal}(\overline{F}/F)$. Soit X une F -variété lisse et géométriquement intègre. On note $\overline{X} = X \times_F \overline{F}$.

L'application naturelle entre groupes de Chow de codimension 2

$$CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G$$

n'est en général ni injective ni surjective, même si l'on suppose que X est projective et que l'ensemble $X(F)$ des points rationnels de X est non vide.

Plusieurs travaux [4, 6, 13, 9, 10, 7, 15] ont été consacrés à l'étude des noyau et conoyau de cette application et au lien avec l'étude du troisième groupe de cohomologie non ramifiée de X à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$.

Dans l'article récent [2], Blinstein et Merkurjev montrent que le troisième groupe de cohomologie non ramifié $H_{nr}^3(F(T)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ d'un F -tore algébrique T s'insère dans une suite exacte à 5 termes [2, Prop. 5.9] faisant intervenir le groupe de Picard géométrique d'une compactification lisse X de T , et les noyau et conoyau de $CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G$.

Dans la présente note, on montre (corollaire 4.3) que des techniques connues permettent d'établir *une suite analogue pour toute variété projective et lisse X sur un corps F qui est géométriquement rationnelle, sous l'une des deux hypothèses :*

- (i) *La F -variété X possède un F -point.*
- (ii) *La dimension cohomologique de F est au plus 3.*

Les longues suites exactes établies dans cette note sont des variantes de celles de l'article [10] de Bruno Kahn : voir [10, Thm. 1, Corollaire], avec la correction apportée dans [5, Prop. 6.1].

Sur un corps de base de caractéristique positive, l'utilisation de la cohomologie de Hodge-Witt logarithmique permet de donner des analogues de certains des résultats de la présente note. Nous renvoyons pour cela à l'article de B. Kahn.

1. Rappels, propriétés générales

On utilise dans cet article le complexe motivique $\mathbb{Z}(2)$ de faisceaux de cohomologie étale sur les variétés lisses sur un corps, comme défini par Lichtenbaum [12, 13].

Les groupes de cohomologie à valeurs dans le complexe $\mathbb{Z}(2)$ sont dans tout cet article les groupes d'hypercohomologie étale. Ils sont notés $\mathbb{H}^i(X, \mathbb{Z}(2))$.

Sur un schéma X , on note $H^i(X, \mathcal{K}_j)$ les groupes de cohomologie de Zariski à valeurs dans le faisceau \mathcal{K}_j sur X associé au préfaisceau $U \mapsto K_i(H^0(U, \mathcal{O}_X))$, où la K -théorie des anneaux est la K -théorie de Quillen.

Étant donné un module galoisien M , c'est-à-dire un G -module continu discret, on note tantôt $H^i(G, M)$ tantôt $H^i(F, M)$ les groupes de cohomologie galoisienne à valeurs dans M .

On note $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$ le module galoisien $\varinjlim_n \mu_n^{\otimes 2}$.

On note $K_3 F_{indec} := \text{Coker}[K_3^{Milnor} F \rightarrow K_3^{Quillen} F]$.

On a les propriétés suivantes, conséquences de travaux de Merkurjev et Suslin [14], de A. Suslin [16], de M. Levine [11], de S. Lichtenbaum [13], de B. Kahn [9], [10, Thm. 1.1, Lemme 1.4].

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}^0(F, \mathbb{Z}(2)) &= 0. \\
\mathbb{H}^1(F, \mathbb{Z}(2)) &= K_3 F_{indec}. \\
\mathbb{H}^2(F, \mathbb{Z}(2)) &= K_2 F. \\
\mathbb{H}^3(F, \mathbb{Z}(2)) &= 0. \\
\mathbb{H}^i(F, \mathbb{Z}(2)) &= H^{i-1}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \text{ si } i \geq 4. \\
\mathbb{H}^i(\overline{F}, \mathbb{Z}(2)) &= 0 \text{ si } i \neq 1, 2. \\
\mathbb{H}^1(\overline{F}, \mathbb{Z}(2)) &= K_3(\overline{F})_{indec} \text{ est divisible, et sa torsion est } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) \text{ (cf.} \\
&[\mathbf{9}, (1.2)]). \text{ Il est donc extension d'un groupe uniquement divisible par } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2). \\
\mathbb{H}^2(\overline{F}, \mathbb{Z}(2)) &= K_2(\overline{F}) \text{ est uniquement divisible.}
\end{aligned}$$

Soit X une F -variété lisse géométriquement intègre, non nécessairement projective. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}^0(X, \mathbb{Z}(2)) &= 0. \\
\mathbb{H}^1(X, \mathbb{Z}(2)) &= K_{3,indec} F(X). \\
\mathbb{H}^1(\overline{X}, \mathbb{Z}(2)) &= K_{3,indec} \overline{F}(X) \text{ est extension d'un groupe uniquement} \\
&\text{divisible par } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2). \text{ Ceci résulte de la suite exacte } [\mathbf{9}, (1.2)] \text{ et de } [\mathbf{16}, \\
&\text{Thm. 3.7}]. \\
\mathbb{H}^2(X, \mathbb{Z}(2)) &= H^0(X, \mathcal{K}_2). \\
\mathbb{H}^3(X, \mathbb{Z}(2)) &= H^1(X, \mathcal{K}_2). \\
\text{On a la suite exacte fondamentale (Lichtenbaum, Kahn } [\mathbf{10}, \text{Thm. 1.1}])
\end{aligned}$$

$$(1.1) \quad 0 \rightarrow CH^2(X) \rightarrow \mathbb{H}^4(X, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow 0$$

où

$$H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H^0(X, \mathcal{H}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)))$$

est le sous-groupe de $H^3(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ formé des éléments non ramifiés en tout point de codimension 1 de X .

Pour toute F -variété projective, lisse et géométriquement intègre X , on a établi dans [6] que les groupes $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ et $H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ sont chacun extension d'un groupe fini par un groupe divisible. Si la dimension cohomologique de F satisfait $\text{cd}(F) \leq i$, ceci implique que les groupes de cohomologie galoisienne $H^r(G, H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$ et $H^r(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$ sont nuls pour $r \geq i + 1$.

On a une suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(G, \mathbb{H}^q(\overline{X}, \mathbb{Z}(2))) \implies \mathbb{H}^n(X, \mathbb{Z}(2)).$$

Remarque 1.1. — Pour $X = \text{Spec}(F)$, compte tenu des identifications ci-dessus, cette suite spectrale donne une suite exacte

$$H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow K_2 F \rightarrow K_2 \overline{F}^G \rightarrow H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow 0.$$

En comparant la suite exacte fondamentale (1.1) au niveau F et au niveau \overline{F} , en prenant les points fixes de G agissant sur la suite au niveau \overline{F} , et en utilisant le lemme du serpent, on obtient :

Proposition 1.2. — Soit X une F -variété lisse et géométriquement intègre. Soit $\varphi : \mathbb{H}^4(X, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow \mathbb{H}^4(\overline{X}, \mathbb{Z}(2))^G$. On a alors une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] &\rightarrow \text{Ker}(\varphi) \rightarrow \\ &\text{Ker}[H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \rightarrow \\ &\text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] \rightarrow \text{Coker}(\varphi). \end{aligned}$$

Notons

$$\mathcal{N}(X) = \text{Ker}\left(H^2(G, K_2(\overline{F}(X))) \rightarrow H^2(G, \bigoplus_{x \in \overline{X}^{(1)}} \overline{F}(x)^\times)\right).$$

Dans [5, Prop. 6.1, Prop. 6.2], pour toute F -variété lisse et géométriquement intègre X , B. Kahn et l'auteur montrent que l'on a une suite exacte

$$\begin{aligned} H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow \text{Ker}[H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] &\rightarrow \\ \mathcal{N}(X) \rightarrow \text{Ker}[H^4(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^4(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] &. \end{aligned}$$

La proposition 6.1 de [5] montre aussi que lorsque X est de dimension au plus 2, alors le complexe

$$\begin{aligned} H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow \text{Ker}[H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] &\rightarrow \\ \mathcal{N}(X) \rightarrow H^4(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^4(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) & \end{aligned}$$

est une suite exacte

$$\begin{aligned} H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) &\rightarrow \\ \mathcal{N}(X) \rightarrow H^4(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^4(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)). & \end{aligned}$$

En effet les groupes $H^3(A_s, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ intervenant dans la proposition 6.1 sont alors nuls : via la conjecture de Gersten, cela résulte du fait que le corps des fractions de A_s est de dimension cohomologique 2, si bien que le complexe de la proposition 6.1 est alors exact.

On a donc ([5]) :

Proposition 1.3. — *Soit X une F -variété lisse et géométriquement intègre.*

(a) *On a une suite exacte*

$$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow \text{Ker}[H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \rightarrow \mathcal{N}(X) \rightarrow \text{Ker}[H^4(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^4(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))].$$

(b) *Si $X(F) \neq \emptyset$ ou si $\text{cd}(F) \leq 3$, on a un isomorphisme*

$$\text{Ker}[H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(X).$$

(c) *Si X est de dimension au plus 2, on a une suite exacte*

$$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow \mathcal{N}(X) \rightarrow H^4(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^4(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

2. Le cas où $H^0(\overline{X}, K_2)$ est uniquement divisible

Le but de ce paragraphe est d'établir les propositions 2.3 et 2.4.

Dans ce paragraphe, on considère une F -variété X lisse et géométriquement intègre, telle que $H^0(\overline{X}, K_2)$ est uniquement divisible, mais on ne suppose pas X projective.

2.1. Méthode initialement K -théorique. — Pour $i \geq 1$, les flèches naturelles

$$H^i(G, K_2\overline{F}(X)) \rightarrow H^i(G, K_2\overline{F}(X)/K_2\overline{F}) \rightarrow H^i(G, K_2\overline{F}(X)/H^0(\overline{X}, K_2))$$

sont alors des isomorphismes.

On considère le complexe des sections de la résolution flasque du faisceau \mathcal{K}_2 sur \overline{X} :

D'après un théorème de Quillen (conjecture de Gersten pour la K -théorie), le complexe

$$K_2\overline{F}(X) \rightarrow \bigoplus_{x \in \overline{X}^{(1)}} \overline{F}(x)^\times \rightarrow \bigoplus_{x \in \overline{X}^{(2)}} \mathbb{Z}$$

est le complexe des sections globales d'une résolution flasque du faisceau \mathcal{K}_2 sur la \overline{F} -variété lisse \overline{X} .

Ce complexe donne donc des suites exactes courtes de modules galoisiens

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow K_2\overline{F}(X)/H^0(\overline{X}, K_2) \rightarrow Z \rightarrow H^1(\overline{X}, K_2) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow Z \rightarrow \bigoplus_{x \in \overline{X}^{(1)}} \overline{F}(x)^\times \rightarrow I \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow I \rightarrow \bigoplus_{x \in \overline{X}^{(2)}} \mathbb{Z} \rightarrow CH^2(\overline{X}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème 90 de Hilbert et le lemme de Shapiro, le théorème de Merkurjev–Suslin et en particulier sa conséquence [4, Thm. 1] [16, 1.8]

$$K_2F(X)/K_2F = (K_2\overline{F}(X)/K_2\overline{F})^G,$$

par des arguments standard (cf. [6, 7]) de cohomologie galoisienne, on obtient :

Proposition 2.1. — *Soit X une F -variété lisse et géométriquement intègre telle que le groupe $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ soit uniquement divisible. Soit*

$$\mathcal{N}(X) = \text{Ker}\left(H^2(G, K_2(\overline{F}(X))) \rightarrow H^2(G, \bigoplus_{x \in \overline{X}^{(1)}} \overline{F}(x)^\times)\right).$$

On a alors une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)^G \rightarrow \\ H^1(G, K_2\overline{F}(X)) \rightarrow \text{Ker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})] \rightarrow \\ H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow \mathcal{N}(X) \rightarrow \\ \text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] \rightarrow H^2(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)). \end{aligned}$$

Pour X une F -variété lisse géométriquement intègre avec $X(F) \neq \emptyset$, on a $H^1(G, K_2\overline{F}(X)) = 0$ ([4]). De façon plus générale, c'est un théorème de B. Kahn [9, Cor. 2, p. 70] que l'on a un isomorphisme

$$H^1(G, K_2\overline{F}(X)) \xrightarrow{\sim} \text{Ker}[H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^3(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))].$$

On a donc établi :

Proposition 2.2. — *Soit X une F -variété lisse et géométriquement intègre telle que le groupe $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ soit uniquement divisible. Soit*

$$\mathcal{N}(X) = \text{Ker}\left(H^2(G, K_2(\overline{F}(X))) \rightarrow H^2(G, \bigoplus_{x \in \overline{X}^{(1)}} \overline{F}(x)^\times)\right).$$

On a alors une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)^G \rightarrow \\ \text{Ker}[H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^3(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \rightarrow \\ \text{Ker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})] \rightarrow H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow \mathcal{N}(X) \rightarrow \\ \text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] \rightarrow H^2(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)). \end{aligned}$$

En combinant les proposition 2.2 et 1.3 on trouve :

Proposition 2.3. — Soit X une F -variété lisse et géométriquement intègre. Supposons le groupe $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ uniquement divisible. Sous l'une des hypothèses $X(F) \neq \emptyset$ ou $\text{cd}(F) \leq 3$, on a une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)^G \rightarrow \\ \text{Ker}[H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^3(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \rightarrow \\ \text{Ker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] \rightarrow H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow \\ \text{Ker}[H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \rightarrow \\ \text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] \rightarrow H^2(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)). \end{aligned}$$

2.2. Méthode entièrement motivique. — Toujours sous l'hypothèse que $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2) \simeq \mathbb{H}^2(\overline{X}, \mathbb{Z}(2))$ est uniquement divisible, étudions la suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(G, \mathbb{H}^q(\overline{X}, \mathbb{Z}(2))) \implies \mathbb{H}^n(X, \mathbb{Z}(2)).$$

La page E_2^{pq} contient un certain nombre de zéros. Tous les termes E_2^{p0} sont nuls. Comme $\mathbb{H}^2(\overline{X}, \mathbb{Z}(2))$ est supposé uniquement divisible, tous les termes $E_2^{p2} = H^p(G, \mathbb{H}^2(\overline{X}, \mathbb{Z}(2)))$ pour $p \geq 1$ sont nuls. Les termes E_2^{p1} sont égaux à $H^p(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ pour $p \geq 2$, groupe qui coïncide avec $H^{p+1}(k, \mathbb{Z}(2))$ pour $p \geq 3$. La flèche $E_2^{02} \rightarrow E_2^{21}$, soit $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)^G \rightarrow H^2(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, est surjective, car il en est déjà ainsi de $K_2 \overline{F}^G \rightarrow H^2(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, comme rappelé au paragraphe 1. On arrive aux énoncés suivants :

Il y a une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{H}^3(X, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow (\mathbb{H}^3(\overline{X}, \mathbb{Z}(2)))^G \rightarrow \mathbb{H}^4(F, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow \\ \text{Ker}(\varphi) \rightarrow H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow \text{Ker}[\mathbb{H}^5(F, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow \mathbb{H}^5(X, \mathbb{Z}(2))]. \end{aligned}$$

Ainsi il y a une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2) \rightarrow (H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))^G \rightarrow H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow \text{Ker}(\varphi) \rightarrow \\ H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow \text{Ker}[H^4(F, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^4(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))]. \end{aligned}$$

En particulier, si $X(F) \neq \emptyset$ ou si l'on a $\text{cd}(F) \leq 3$, alors on a une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2) \rightarrow (H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))^G \rightarrow \\ H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow \text{Ker}(\varphi) \rightarrow H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

La flèche $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow \text{Ker}(\varphi)$ est injective si $X(F) \neq \emptyset$, ou si $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est nul, par exemple si $\text{cd}(F) \leq 2$.

Pour le conoyau de φ , on trouve une suite exacte

$$0 \rightarrow D \rightarrow \text{Coker}(\varphi) \rightarrow H^2(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$$

où D est un sous-quotient de $\text{Ker}[\mathbb{H}^5(F, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow \mathbb{H}^5(X, \mathbb{Z}(2))]$. Ce dernier groupe est nul si le noyau de $H^4(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^4(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est nul. En particulier $D = 0$ si $X(F) \neq \emptyset$, ou si $\mathbb{H}^5(F, \mathbb{Z}(2)) = H^4(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est nul, par exemple si $\text{cd}(F) \leq 3$.

Au bout du compte, pour X une F -variété lisse géométriquement intègre avec $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ uniquement divisible, et soit $X(F) \neq \emptyset$ soit $\text{cd}(F) \leq 3$, on trouve une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] \rightarrow \text{Ker}(\varphi) \rightarrow \\ \text{Ker}[H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \rightarrow \\ \text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] \rightarrow H^2(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)). \end{aligned}$$

et une suite exacte

$$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow \text{Ker}(\varphi) \rightarrow H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow 0.$$

Si l'on quotiente les deux termes $\text{Ker}(\varphi) \subset \mathbb{H}^4(X, \mathbb{Z}(2))$ et $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ par l'image de $\mathbb{H}^4(F, \mathbb{Z}(2)) \simeq H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, ce qui par fonctorialité de la suite spectrale appliquée au morphisme structural $X \rightarrow \text{Spec}(F)$ induit une flèche $\text{Ker}(\varphi)/\mathbb{H}^4(F, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, on trouve :

Proposition 2.4. — *Soit X une F -variété lisse et géométriquement intègre. Supposons que $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible. Supposons en outre que l'on a $X(F) \neq \emptyset$ ou $\text{cd}(F) \leq 3$. On a alors une suite exacte*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(X, \mathcal{K}_2) \rightarrow H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)^G \rightarrow \\ \text{Ker}[H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^3(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \rightarrow \\ \text{Ker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] \rightarrow H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow \\ \text{Ker}[H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \rightarrow \\ \text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] \rightarrow H^2(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)). \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $X(F) \neq \emptyset$, le groupe $\text{Ker}[H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^3(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))]$ est nul.

Remarque 2.5. — On retrouve donc ainsi la proposition 2.3 sans passer par le groupe $\mathcal{N}(X)$ et la proposition 1.3.

2.3. Comparaison entre les deux méthodes. — Sous réserve de vérification des commutativités des diagrammes, sur tout corps F (sans condition de dimension cohomologique), le lien entre la suite exacte

$$\mathrm{Ker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})] \rightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \rightarrow$$

$$\mathrm{Ker}[H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \rightarrow \mathrm{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G]$$

extraite de la proposition 1.2 et la suite exacte

$$\mathrm{Ker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})] \rightarrow H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \rightarrow$$

$$\mathcal{N}(X) \rightarrow \mathrm{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G]$$

extraite de la proposition 2.2 est fourni par le diagramme de suites exactes verticales

$$\begin{array}{ccccc} H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) & \xrightarrow{\hspace{10em}} & H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathrm{Ker}(\varphi) & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \mathrm{Ker}[H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \mathcal{N}(X) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathrm{Ker}[H^4(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^4(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] & \longrightarrow & \mathrm{Ker}[H^4(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H^4(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] & & \end{array}$$

où la suite verticale de droite vaut pour toute F -variété lisse et géométriquement intègre X ([5], voir la proposition 1.3 ci-dessus), et où celle de gauche est établie au début de la section 2.2 pour les F -variétés X telles que $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible.

2.4. Variétés avec $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ uniquement divisible. — Pour \overline{F} un corps algébriquement clos – toujours supposé de caractéristique nulle – et Y une \overline{F} -variété intègre, projective et lisse, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(Y)$ est sans torsion.
- (ii) Pour tout entier $n > 0$, $H_{\text{ét}}^1(Y, \mu_n) = 0$.
- (iii) $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ et le groupe de Néron–Severi $\mathrm{NS}(Y)$ est sans torsion.
- (iv) Le groupe $H^0(Y, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible.

L'équivalence des trois premières propriétés est classique. Pour l'équivalence avec la quatrième, voir [6, Prop. 1.13], qui s'appuie sur des résultats de Merkurjev et de Suslin.

Les propriétés ci-dessus sont satisfaites par toute \overline{F} -variété projective et lisse géométriquement unirationnelle, mais aussi par toute surface $K3$ et par toute surface projective et lisse dans l'espace projectif \mathbf{P}^3 .

Pour une \overline{F} -surface Y projective et lisse satisfaisant ces propriétés, la dualité de Poincaré implique la nullité des groupes $H_{\text{ét}}^3(Y, \mu_n)$ pour tout $n > 0$. On sait (Bloch, Merkurjev–Suslin, cf. [6, (2.1)]) que la nullité de ces groupes implique que le groupe de Chow $CH^2(Y)$ n'a pas de torsion.

Pour une F -surface X projective, lisse et géométriquement intègre telle que \overline{X} satisfasse ces propriétés, le groupe $\text{Ker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})]$ coïncide donc avec le sous-groupe de torsion $CH^2(X)_{\text{tors}}$ de $CH^2(X)$. Sans hypothèse supplémentaire sur X , il est difficile de contrôler le module galoisien $H^1(\overline{X}, K_2)$ et l'application

$$CH^2(X)_{\text{tors}} = \text{Ker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})] \rightarrow H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)).$$

Renvoyons ici le lecteur au délicat travail d'Asakura et Saito [1] qui établit que pour un corps p -adique F et une surface lisse dans \mathbf{P}_k^3 , de degré au moins 5 “très générale”, le groupe

$$CH^2(X)_{\text{tors}} \subset H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$$

est infini.

Au paragraphe suivant, on donnera des hypothèses restrictives permettant de facilement contrôler le module $H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ et sa cohomologie galoisienne.

3. Le module galoisien $H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$

On considère la flèche naturelle

$$\text{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times \rightarrow H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2).$$

Proposition 3.1. — *Soit X une F -variété projective, lisse et géométriquement intègre. Supposons $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et supposons que les groupes $H_{\text{ét}}^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell)$ sont sans torsion. Alors pour tout $i \geq 2$, la flèche*

$$H^i(G, \text{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times) \rightarrow H^i(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — D'après [6, Thm. 2.12], la flèche Galois équivariante

$$\mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times \rightarrow H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$$

a alors noyau et conoyau uniquement divisibles. Elle induit donc un isomorphisme sur $H^i(G, \bullet)$ pour $i \geq 2$. \square

Remarque 3.2. — L'hypothèse que les groupes $H_{\text{ét}}^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell)$ sont sans torsion est équivalente à l'hypothèse que le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(\overline{X})$ est un groupe divisible.

Proposition 3.3. — *Soit X une F -variété projective, lisse et géométriquement intègre. Supposons qu'il existe une courbe $V \subset X$ telle que sur un domaine universel Ω l'application $CH_0(V_\Omega) \rightarrow CH_0(X_\Omega)$ est surjective, et supposons que les groupes $H_{\text{ét}}^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell)$ sont sans torsion. Alors pour tout $i \geq 1$, la flèche*

$$H^i(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times) \rightarrow H^i(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — D'après [6, Thm. 2.12], sous les hypothèses de la proposition, la flèche Galois équivariante

$$\mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times \rightarrow H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$$

est surjective et a un noyau uniquement divisible. Elle induit donc un isomorphisme sur $H^i(G, \bullet)$ pour $i \geq 1$. \square

Remarques 3.4. — Rappelons que l'on suppose $\mathrm{car}(F) = 0$.

(a) L'hypothèse sur le groupe de Chow des zéro-cycles implique $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $i \geq 2$. Elle implique que le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(\overline{X})$ est un groupe fini. Elle est satisfaite pour les variétés \overline{X} dominées rationnellement par le produit d'une courbe et d'un espace projectif, en particulier par les variétés géométriquement unirationnelles.

(b) Sous les hypothèses de la proposition, on a $\mathrm{Br}(\overline{X}) = 0$.

(c) Toutes les hypothèses sont satisfaites pour une variété \overline{X} qui est facteur direct birationnel d'une variété rationnelle.

4. Applications aux variétés à petit motif

Théorème 4.1. — *Soit X une F -variété projective, lisse et géométriquement intègre. Soit $\varphi : \mathbb{H}^4(X, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow \mathbb{H}^4(\overline{X}, \mathbb{Z}(2))^G$.*

Supposons satisfaites les conditions :

(i) Sur un domaine universel Ω , le degré $CH_0(X_\Omega) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.

(ii) Le groupe $\text{Pic}(\overline{X}) = \text{NS}(\overline{X})$ est sans torsion.

(iii) Pour tout ℓ premier, le groupe $H_{\text{ét}}^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell)$ est sans torsion.

(iv) On a au moins l'une des propriétés : $X(F) \neq \emptyset$ ou $\text{cd}(F) \leq 3$.

Alors on a une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] &\rightarrow \text{Ker}(\varphi) \rightarrow \\ &\text{Ker}[H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \rightarrow \\ &\text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] \rightarrow H^2(G, \text{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times), \end{aligned}$$

qui induit une suite exacte

$$\begin{aligned} \text{Ker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] &\rightarrow H^1(G, \text{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times) \rightarrow \\ &\text{Ker}[H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow H_{nr}^3(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \rightarrow \\ &\text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] \rightarrow H^2(G, \text{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times). \end{aligned}$$

Démonstration. — Comme on a supposé $\text{car}(F) = 0$, l'hypothèse (i) implique [3] que tous les groupes $H^i(X, \mathcal{O}_X)$ pour $i \geq 1$ sont nuls, que l'on a $\text{Pic}(\overline{X}) = \text{NS}(\overline{X})$, et que le groupe de Brauer $\text{Br}(\overline{X})$ s'identifie au groupe fini $\bigoplus_\ell H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell)_{\text{tors}}$. Sous l'hypothèse (i), l'hypothèse (iii) est donc équivalente à $\text{Br}(\overline{X}) = 0$.

Sous les hypothèses (i) et (iii), la proposition 3.3 donne

$$H^i(G, \text{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times) \xrightarrow{\sim} H^i(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$$

pour tout $i \geq 1$.

Sous les hypothèses (i) et (ii), d'après [6, Prop. 1.14], on a $K_2\overline{F} = H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$. Le groupe $K_2\overline{F}$ étant uniquement divisible, on peut appliquer les résultats de la section 2. \square

Remarque 4.2. — Sous l'hypothèse $X(F) \neq \emptyset$ ou $\text{cd}(F) \leq 2$, la flèche $\text{Ker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] \rightarrow H^1(G, \text{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times)$ est injective.

Corollaire 4.3. — Soit X une F -variété projective, lisse et géométriquement intègre. Supposons \overline{X} rationnelle. Soit $\varphi : \mathbb{H}^4(X, \mathbb{Z}(2)) \rightarrow \mathbb{H}^4(\overline{X}, \mathbb{Z}(2))^G$. Alors, si $X(F) \neq \emptyset$, ou si $\text{cd}(F) \leq 3$, on a une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] &\rightarrow \text{Ker}(\varphi) \rightarrow H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \rightarrow \\ &\text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] \rightarrow H^2(G, \text{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times), \end{aligned}$$

qui induit une suite exacte

$$\begin{aligned} \text{Ker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] &\rightarrow H^1(G, \text{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times) \rightarrow \\ H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) &\rightarrow \text{Coker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] \rightarrow \\ &H^2(G, \text{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times). \end{aligned}$$

Remarques 4.4. — (a) Sous l'hypothèse $X(F) \neq \emptyset$ ou $\text{cd}(F) \leq 2$, la flèche

$$\text{Ker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G] \rightarrow H^1(G, \text{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times)$$

est injective.

(b) Dans le cas particulier où X est une F -compactification lisse équivariante d'un F -tore, ce résultat est très proche de celui de Blinsein et Merkurjev [2, Prop. 5.9]. Dans ce cas, le groupe $CH^2(\overline{X})$ est sans torsion, le groupe

$$\text{Ker}[CH^2(X) \rightarrow CH^2(\overline{X})^G]$$

coïncide donc avec $CH^2(X)_{tors}$. Par ailleurs, l'intersection des cycles

$$\text{Pic}(\overline{X}) \times \text{Pic}(\overline{X}) \rightarrow CH^2(\overline{X})$$

induit une application naturelle surjective ([8, §5.2, Proposition, p. 106])

$$\text{Sym}^2(\text{Pic}(\overline{X})) \rightarrow CH^2(\overline{X}).$$

Références

- [1] M. Asakura et S. Saito, Surfaces over a p -adic field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles, *Algebra & Number Theory* 1 (2008), 163–181.
- [2] S. Blinsein et A. Merkurjev, Cohomological invariants of algebraic tori, à paraître dans *Algebra & Number Theory*.
- [3] S. Bloch et V. Srinivas, Remarks on correspondences and algebraic cycles, *Amer. J. Math.* **105** (1983), 1235–1253.
- [4] J.-L. Colliot-Thélène, Hilbert's Theorem 90 for K_2 , with application to the Chow groups of rational surfaces, *Invent. math.* **71** (1983) 1–20.
- [5] J.-L. Colliot-Thélène et B. Kahn, Cycles de codimension 2 et H^3 non ramifié pour les variétés sur les corps finis, *J. K-Theory*, à paraître.
- [6] J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind, K_2 -cohomology and the second Chow group, *Math. Ann.* **270** (1985), 165–199.
- [7] J.-L. Colliot-Thélène et C. Voisin, Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière, *Duke Math. J.* **161** no. 5 (2012) 735–801.

- [8] W. Fulton, Introduction to toric varieties, Annals of Mathematics Studies **131**, Princeton University Press.
- [9] B. Kahn, Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres, K-theory **7** (1993) 55–100.
- [10] B. Kahn, Applications of weight-two cohomology, Doc. Math. **1** (1996), No. 17, 395–416.
- [11] M. Levine, The indecomposable K_3 of fields, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4) **22** (1989), no. 2, 255–344.
- [12] S. Lichtenbaum, The construction of weight-two arithmetic cohomology, Invent. math. **88** (1987) 183–215.
- [13] S. Lichtenbaum, New results on weight-two motivic cohomology, The Grothendieck Festschrift, vol. 3, Progress in Math. **88**, Birkhäuser, Boston, 1990, 35–55.
- [14] A. S. Merkurjev et A. A. Suslin, The group K_3 for a field, Math. USSR Izvestiya **36** (1991) no 3 541–565.
- [15] A. Pirutka, Sur le groupe de Chow de codimension deux des variétés sur les corps finis, Algebra & Number Theory **5** (2011) no. 6, 803–817.
- [16] A. A. Suslin, Torsion in K_2 of fields, K-Theory **1** (1987) 5–29.

13 février 2013

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE, C.N.R.S., Université Paris Sud, Mathématiques,
Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail* : j1ct@math.u-psud.fr